Riemann の写像定理とその周辺 (幾何学的関数論における合成積の応用)

鶴見, 和之

数理解析研究所講究録
第1727巻 2011年 87-93

Riemannの写像定理とその周辺

鶴見和之

概 要

等角写像論は約200年の歴史があり、多くの結果が得られ、その応用は数学ばかりでなく、物理学、工学にも及んでいる。従って、その全貌を見ることは困難であります。等角写像論の中で最も重要な定理は「Riemannの写像定理」であり、その完全な証明には多くの学者が係り、種々の方法が考えられました。本稿では、それらの歴史と関連事項の一端を見ることにします。

1 Riemannの写像定理

複素平面$\mathbb{C}$上の領域$\mathcal{D}$が単連結であるとは、$\mathcal{D}$の基本群$\pi_1(\mathcal{D})=0$のときである。このとき、

定理 1 (Riemannの写像定理). 領域$\mathcal{D}$は2点以上の境界点を持つ単連結領域とする。この時、$\mathcal{D}$は単位円$\mathbb{U}$と等角同値である。

この定理が最初に公表されたのは、160年前、B. Riemann (1826-1866) のGöttingen大学における学位論文: *Grundlagen für allgemeine Theorie der Functionen einer veranderlinchen complexen Grosse* (1851) においてである。彼はこの定理をDirichlet原理によって証明したが、このDirichlet原理には基本的な欠陥があり、その証明法の再考が必要となった。

2 Dirichlet原理

$\mathcal{D}$を$\mathbb{C}$の領域とし、Φを$\mathcal{D}$で定義された偏微分可能な関数とする。積分

$$\mathfrak{D}[\Phi]=\iint_{\mathcal{D}}|\mathrm{grad}\Phi|^2dS \qquad (z=x+iy,\ dS=dxdy)$$

をΦのDirichlet積分という。関数族$\mathfrak{F}$の或る条件の下でのDirichlet積分$\mathfrak{D}[\Phi]$ $(\Phi\in\mathfrak{F})$を最小にする問題を考える。

Dirichletの原理 (Original Statement [4], p.4). gを$\mathcal{D}$の境界$\partial\mathcal{D}$の上の連続関数とする。$\mathfrak{F}$を$\mathcal{D}$で調和で、$\partial\mathcal{D}$上で$f=g$である関数fの集合とする。この時、次の条件をみたす$f\in\mathfrak{F}$が存在する。

$$\mathfrak{D}[f]=\inf\{\mathfrak{D}[\Phi]:\Phi\in\mathfrak{F}\}.$$

Dirichlet原理は19世紀の中頃に考え出され、Gauss、Dirichletその他の数学者はDirichlet原理を用いて、Potential論の重要な結果を得ている ([6], [13])。しかし、この原理には「下限と最小値との混同」による間違いという事があり、この事がC. Weierstrassによって指摘された。たとえば、次の例は下限は存在するが、最小値をとる関数 $f \in \mathfrak{F}$ は存在しない：

例 ([6], 3a, pp.6-7). 閉区間 $[0,1]$ において、区分的に連続な導関数を持つ連続関数 $f(z)$ で条件

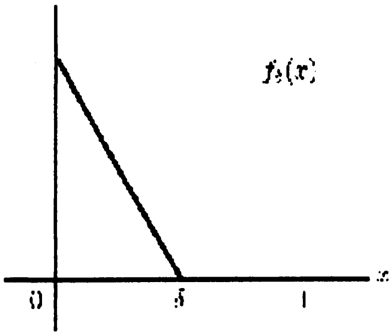
$$f(0)=1,\ f(1)=0$$

である関数 f の集合 $\mathfrak{F}$ において、積分

$$\mathcal{I}[f]=\int_0^1 [1+(f'(x))^2]^{\frac{1}{4}}dx$$

を最小にする問題を考えるとき、次の関数

$$f_\delta(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x}{\delta} & : \ 0 \leqq x < \delta < 1 \\ 0 & : \qquad \delta < x \leqq 1 \end{cases}$$



をとると、任意の δ $(0<\delta<1)$ に対して、$f_\delta(x) \in \mathfrak{F}$ で

$$\begin{aligned}\mathcal{I}[f_\delta] &= \int_0^1 [1+(f'(x))^2]^{\frac{1}{4}}dx \\ &= \int_0^\delta \left\{1+\frac{1}{\delta^2}\right\}^{\frac{1}{4}} dx + \int_\delta^1 1dx \\ &= \delta^{\frac{1}{2}}(1+\delta^2)^{\frac{1}{4}} + (1-\delta) < 1+\delta^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

これより、$\mathcal{I}[f]$ の下限は1であるが、$\mathcal{I}[f]=1$ となる $f \in \mathfrak{F}$ は存在しない。

3 Riemannの写像定理の続き

$\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ は単連結領域でその境界は少なくとも2つの点を持つとする。いま、$\zeta \in \mathcal{D}$ をとり、$g(z;\zeta)$ を ζ に関する $\mathcal{D}$ のGreen関数とする、すなわち、$g(z;\zeta)$ は $z=\zeta$ 以外の $\mathcal{D}$ で調和で、任意の $b \in \partial\mathcal{D}$ に対して、$\lim_{z\to b}\{g(z;\zeta)\}=0$ で、$z=\zeta$ の近傍で、

$$g(z;\zeta)=\log|z-\zeta|+g_0(z;\zeta)$$

(ここで、$g_0(z;\zeta)$ は $\mathcal{D}$ で調和な関数) と表される。($\mathcal{D}$ が有限個のJordan曲線で囲まれた領域ならば、任意の $\zeta \in \mathcal{D}$ に対して、Green関数は存在する [18]。)

いま、$\zeta=0$ とおき、$h(z)$ を $g(z)=g(z;0)$ の共役調和関数とし、

$$w=f(z)=e^{\{g(z)+ih(z)\}}$$

とおくと、$w=f(z)$ は原点を原点に写し、$\mathcal{D}$ を単位円 $\mathbb{U}$ に写す正則関数である ([19])。

4 単連結性について

$\mathcal{D}$ を $\mathbb{C}$ の領域とし、$\mathcal{H}(\mathcal{D})$ を $\mathcal{D}$ で正則な関数の集合とする。この時、次の事が成り立つ

定理 2. 次の条件は同値である。

(1) $\mathcal{D}$ は単連結 ($\pi_1(\mathcal{D}) = 0$) である。

(2) 集合 $\mathbb{C} \setminus \mathcal{D}$ は有界な連結成分を持たない。

(3) $\mathcal{D}$ に 0 点を持たない関数 $f(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{D})$ は正則な対数を持つ。

(4) $\mathcal{D}$ に 0 点を持たない関数 $f(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{D})$ は正則な平方根を持つ。

条件 (1)、(2) は位相条件であり、(3)、(4) は関数論的条件である。これらの条件と同値な次の関数論的条件は多変数関数論へも拡張され、歴史的ばかりでなく、物理学的、工学的にも重要な条件である。

$K \subset \mathbb{C}$ を compact 集合とし、

$$\hat{K} := \left\{ z \in \mathbb{C} : |p(z)| \leqq \max_{w \in K} |p(w)|, \ {}^{\forall}\text{多項式}\, p(z) \right\}$$

とおく、この $\hat{K}$ を K の多項式凸包という。$K \subset \hat{K}$ であるが、$K = \hat{K}$ である時、K は多項式凸であるという。$\hat{K}$ で正則な関数は $\hat{K}$ 上で多項式によって近似することが出来る (Runge の定理) (C. Runge, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Acta Math. 6 (1885) 229-244.))。

また、$\hat{K}$ は「点 z_0 と ∞ 点とを結ぶどんな曲線をとっても必ず K と交わる様な点 z_0 の全体」として求めることが出来る。従って、定理 2 の条件は次の条件と同値である。

(5) 任意の compact 集合 $K \subset \mathcal{D}$ に対して、$\hat{K} \subset \mathcal{D}$ である。

単連結領域及びその境界は複雑である、しかし、Riemann は「単連結領域とは Jordan 閉曲線によって囲まれた領域である」と思っていた様である [19]。

5 核関数

正則関数の L_2-理論は S. Bergman の論文: (*Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen.*(*Thesis in Berlin* (1921)), Math. Ann. 96 (1922) から始まる。この理論は等角写像論に適用出来るばかりでなく、関数解析学、多変数関数論、偏微分方程式論へも応用出来る重要な理論である。

$\mathcal{D}$ を $\mathbb{C}$ の領域とし、$\mathcal{D}$ で定義された複素関数 f、g に対して、

$$(f, \overline{g}) = \iint_{\mathcal{D}} f(z)\overline{g(z)}dS$$

$$||f|| := \sqrt{(f, \overline{f})}$$

とおく。そうすると、次の式が成り立つ。

$$|(f, \overline{g})| \leqq ||f|| \cdot ||g||$$

以下、領域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ は有界な単連結領域とする。$\mathcal{D}$ で正則な関数のベクトル空間 $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ に対して、

$$\mathcal{L}_2 \equiv \mathcal{L}_2(\mathcal{D}) := \{f \in \mathcal{H}(\mathcal{D}) : ||f|| < \infty\}$$

とおくと、$\mathcal{L}_2$ は距離空間 ($d(f,g) := ||f-g||$ による) となる。さらに、$\mathcal{L}_2$ は可分な Hilbert 空間となり、完備正規直交系

$$\mathcal{S} := \{\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots\}$$

が存在し、任意の $f(z) \in \mathcal{L}_2$ は

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(z)$$

と表される。また

$$K(z, \overline{t}) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(t)} \qquad (z, t \in \mathcal{D})$$

とおく、これを Bergman の核関数 (又は単に、核関数) といい、この核関数は正規直交系 $\mathcal{S}$ のとり方によらない。また、任意の $f \in \mathcal{L}_2$ に対して

$$f(z) = \iint_{\mathcal{D}} f(t) K(z, \overline{t}) dS_t \qquad (z \in \mathcal{D})$$

が成り立つ、この性質を核関数の再生性 (K を再生核) という。これより

$$|f(z)| \leqq ||f|| \sqrt{K(z, \overline{z})}$$

$\mathfrak{F}(\mathcal{D})$ を次の性質をみたす関数 $f \in \mathcal{H}(\mathcal{D})$ の集合とする

$$f(t) = 0, \quad f'(t) = 1 \qquad (t \in \mathcal{D})$$

任意の関数 $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{D})$ は領域 $\mathcal{D}$ を領域 $\Delta(\ni 0)$ に写し、Δ の面積は

$$\mathcal{J}(f') = \iint_{\mathcal{D}} |f'(z)|^2 dS_z$$

で与えられる。その面積が最小となるのは、Δ が原点を中心とする円の場合である。故に、その写像関数 $g(z,t)$ は次の形に表される。

$$g(z,t) = \int_t^z \frac{K(s, \overline{t})}{K(t, \overline{t})} dS$$

これらより、次の事が得られる。

定理 3. $t \in \mathcal{D}$とし、$f \in \mathcal{L}_2$が条件

$$f(t) = 1, \quad \|f\| = \min\{\|\phi\| : \phi \in \mathcal{L}_2\}$$

をみたすならば、次の式が得られる。

$$f(z) = \frac{K(z,\bar{t})}{K(t,\bar{t})} \qquad (z \in \mathcal{D})$$

これより、核関数の等角写像への適用が得られる。

定理 4.

$$w = g(z,t) = \int_t^z \frac{K(s,\bar{t})}{K(t,\bar{t})} ds$$

とおくと、

$$g(t,\bar{t}) = 0, \quad \left.\frac{\partial}{\partial z} g(z,\bar{t})\right|_{z=t} = 1$$

が成り立ち、$w = g(z,\bar{t})$は領域$\mathcal{D}$を円$\mathbb{U}(0,r(t))$に写す、ここに、半径$r(t) = \sqrt{\pi K(t,\bar{t})}$である。

6 接触法

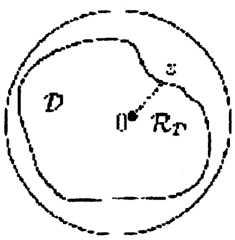
接触法(Schmiegungsverfahren)と云われている「Riemannの写像定理」の証明法がP. Koebeによって開発された。これは正規族の理論(コンパクト一様収束の位相)を用いた関数論的証明法である([3] 第9章, [8] 第17章)。

$\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$を単連結領域とし、その境界$\partial\mathcal{D}$は少なくとも2つの点を含むことにする。この時、$\mathcal{D}$は単位円$\mathbb{U}$内の原点を含む連結領域に写すことが出来る(従って、以下、$\mathcal{D}$は$\mathbb{U}$に含まれる原点を含む単連結領域とする——これをKoebe領域という)。

Koebe領域$\mathcal{D}$に対して

$$\mathcal{R}_{\mathcal{D}} := \min\{|z| : z \in \partial\mathcal{D}\}$$

とおき、これをKoebe半径という。Kobe領域$\mathcal{D}$とKoebe半径$\mathcal{R}_{\mathcal{D}}$に対して、次の条件(1)〜(4)をみたす写像$f$が存在する(これをKoebe写像という)。



(1) $f(\mathcal{D}) \subset \mathbb{U}$

(2) $f(0) = 0$

(3) $f'(0) > 1 + \dfrac{1}{32}(1 - \mathcal{R}_{\mathcal{D}})^2$

(4) $|f(z)| \geqq |z|$

この時、$f(\mathcal{D})$ はKoebe領域で $\mathcal{R}_{f(\mathcal{D})} \geqq \mathcal{R}_{\mathcal{D}}$。これより、$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$、$f_1$ を $\mathcal{D}_0$ のKoebe写像、$\mathcal{D}_1 = f_1(\mathcal{D}_0)$、$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_{\mathcal{D}_1}$、$f_2$ を $\mathcal{D}_1$ のKoebe写像、$\mathcal{D}_2 = f_2(\mathcal{D}_1)$、$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_{\mathcal{D}_2}$、以下帰納的に、$f_1, f_2, f_3, \ldots$、$\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$、$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots$ を作ると、

$$\mathcal{R}_1 \leqq \mathcal{R}_2 \leqq \mathcal{R}_3 \leqq \ldots < 1$$

で

$$\mathcal{R}_n \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

これらの事を用いて、$\mathcal{D}$ から単位円 $\mathbb{U}$ への全単射正則写像を作ることができる。

正規族の理論及び、正則写像については [11]、[12]、[14]、更に次の論文が重要である：

G. Valliron, *Familles Normales et Quasi-Normales de Fonctions Meromorphés*, Memorial de Sci. Math. No.38, Gauthier-Vaillars (932).

A. Ostrowski, *Zur konformen Abbildung einfach zusammenhangender Gebiete*, Jahresbr. Deutsch. Math. Verein 38 (1929) 168-182.

参考文献

[1] S. Bergman, *The Kernel Function and Conformal Mapping*, Math. Surveys No.5, A. M. S. (1950).

[2] L. Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie I, II*, Teubner (1930, 1931).

[3] R. B. Birckel, *An Introduction to Classical Complex Analysis I*, Birkhäuser (1979).

[4] C. Caratheodory, *Conformal Representation*, Cambridge Univ. Press (1932).

[5] C. Caratheodory, *Theory of Functions of a Complex Variables I, II*, Chelsea (1958, 1960).

[6] R. Courant, *Dirichlet's Principle*, Conformal Mapping and Minimal Surface, Dover (1978).

[7] P. R. Garabedian, *Univalent Functions and the Riemann Mapping Theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 61 (1976), 242-244.

[8] E. Hill, *Analytic Function Theory II*, Chelsea (1962).

[9] G. Julia, *Leçons sur la representation conforme des sires simplement connexes*, Chiers Sci., Gauthier-Villars (1950).

[10] G. Julia, *Leçons sur la representation conforme des sires multiplement connexes*, Chiers Sci., Gauthier-Villars (1950).

[11] P. Koebe, *Über eine neue Methode der konformen Abbildung und Uniformisierung (Voranzeige)*, Göttingen Nachr. (1912) 844-848.

[12] P. Koebe, *Abhandlungen zur Theorie konformen Abbildung I, Die Kreisabbildung des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs und die Ränderzuordung bei konformer Abbildung*, Jour. für Reine und Angew. Meht. 145 (1915) 177-223.

[13] A. F. Monna, *Dirichlet's Principle*, Oosthoek (1975).

[14] P. Montel, *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes*, Springer-Verlag (1992).

[15] Z. Nehari, *Conformal Mapping*, McGraw-Hill (1952).

[16] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag (1992).

[17] B. Riemann, *Gesammerlte Mathmatische Werke*, Teubner (1990).

[18] M. Tsuji, *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen (1959).

[19] J. L. Walsh, *History of the Riemann Mapping Theorem*, Amer. Math. Monthly 80 (1973), 270-276.

[20] B. H. Yandell, *The Honors Class*, Ak Peters Natick (2002).